

Validation du frottement dans un modèle multi-échelles d'écoulements granulaires immergés en vue de l'étude numérique de la traînée

N. Coppin¹, M. Constant¹, J. Lambrechts¹,
F. Dubois², V. Legat¹

¹ UCLouvain, Université Catholique de Louvain, {nathan.coppin,matthieu.constant,jonathan.lambrechts,vincent.legat}@uclouvain.be

² LMGC, Univ. Montpellier, CNRS, frederic.dubois@umontpellier.fr

Résumé —

Le frottement a une influence importante sur la force de traînée subie par un objet en mouvement dans un milieu granulaire. Pour les milieux immergés, cette influence est encore mal connue. Le frottement est implémenté dans un modèle multi-échelles d'écoulements granulaires immergés, puis validé dans le cas sec du tambour rotatif. Ensuite, une méthode de simulation est présentée en vue de l'étude numérique de la traînée dans le cas avec fluide. Les objectifs futurs sont de déterminer l'influence des paramètres physiques tels que le frottement entre grains, la vitesse de l'écoulement, ou encore la viscosité du fluide.

Mots clés — Simulation, multi-échelles, écoulement granulaire, MigFlow, frottement, traînée.

1 Introduction

Les milieux granulaires, qu'ils soient secs ou immergés, présentent des caractéristiques hybrides aux fluides et aux solides. Tels des fluides, ils peuvent s'écouler, tels des solides, ils peuvent résister au cisaillement. Leurs propriétés particulières ont été largement étudiées, si bien du point de vue expérimental, [4] que théorique, [10], ou numérique, [12]. Une des propriétés d'intérêt des écoulements granulaires est la force de traînée subie par les objets immergés dans ceux-ci. Celle-ci concerne des domaines technologiques tels que le mélange de particules à l'aide de bras mélangeurs, le labourage des terres agricoles avec des charrues à soc, ou encore l'étude de protection anti-avalanches. Dans ces nombreuses applications, la présence d'un fluide est parfois observée, et l'intérêt d'un modèle qui combine les deux phases apparaît clairement.

En ce qui concerne la traînée dans les matériaux granulaires secs, les premières études expérimentales ont été effectuées dans les années 1970 par Wiegand [17]. En étudiant la force subie par un cylindre immergé dans un lit de sable au repos, il a observé une faible dépendance de celle-ci par rapport à la vitesse de déplacement de l'objet, et une dépendance en racine carrée à la forme de ce dernier. Ces conclusions sur la dépendance en vitesse et au diamètre de l'objet cylindrique ont été également observées expérimentalement par *Albert et al.*, pour des vitesses faibles (0~2mm/s), et par *Wassgren et al.* pour une gamme de vitesse plus large (0~500mm/s) [2], [15]. Ce comportement est particulier aux matériaux granulaires ; dans les fluides moléculaires, on retrouve une dépendance au carré de la vitesse pour la traînée, ou linéaire en vitesse dans les écoulements rampants. Cela est dû à la nature frictionnelle des mécanismes de résistance au déplacement de l'objet dans le fluide granulaire, qui, à faible vitesse, prennent le pas sur le transfert de quantité de mouvement des grains à l'objet, [6]. En effet, les grains forment entre eux des structures complexes. Lorsque l'objet est en mouvement, les contraintes qu'il applique sur les grains environnants se transmettent aux autres via ces structures, formant des chaînes de force. Ces chaînes contribuent fortement à la résistance au mouvement de l'objet. Pour les vaincre, il est nécessaire d'appliquer une contrainte qui dépasse le seuil de frottement statique entre les grains, ce qui permet de mettre ceux-ci en mouvement et de réorganiser la structure interne de l'ensemble de manière à ce que l'objet puisse s'y déplacer. Le frottement dynamique entre l'objet et les grains contribue également à la traînée, bien que plus modestement. Puisque ces mécanismes sont frictionnels, ils sont indépendants de

la vitesse, et la force de traînée l'est aussi. Ces chaînes de forces se forment et sont brisées encore et encore, donnant ainsi une nature fluctuante à F_d , [1]. A haute vitesse, ou dans les milieux granulaires dilués, on retrouve une dépendance au carré de la vitesse, [16], [14].

Le matériau granulaire est dit immergé si le fluide environnant modifie significativement son comportement statique ou dynamique. Il existe différentes approches pour simuler numériquement les mélanges fluide-grains. Les méthodes à deux phases résolvent d'une part les équations de conservation du fluide et d'autre part celles des grains vus comme une phase continue [7]. La force d'interaction qui s'exerce entre les deux phases ainsi que les contraintes particulières et fluides découlent de relations empiriques. Les méthodes de simulations directes combinent une méthode aux éléments discrets pour la phase granulaire, en suivant les particules de manière lagrangienne et en résolvant les contacts inter-grains et grain-parois, et une méthode d'éléments finis qui calcule explicitement l'écoulement autour de chaque grain. Pour ce faire, il est nécessaire de remailler le domaine à chaque fois que les grains sont déplacés, [8], ce qui implique de grands coûts calcul. L'approche présentée dans la section suivante couple la résolution du fluide à une plus grande échelle que celle des grains avec une méthode DEM pour ceux-ci, et permet d'obtenir une bonne représentation de la physique des grains pour un coût nettement moindre.

La traînée dans les matériaux granulaires immergés a fait l'objet de quelques études, par exemple sur la pénétration de projectiles dans ce type de milieu, principalement en ce qui concerne la profondeur de pénétration, [3]. *Sovilla et al.* ont également étudié la force de traînée exercée par une avalanche de neige mouillée sur des pylônes cylindriques, et ont observé des comportements similaires à ceux d'un milieu granulaire sec, [13]. Toutefois, il n'existe pas vraiment de modèle numérique capable d'investiguer cette traînée dans des configurations variées et complexes ; l'objectif de notre recherche est donc d'utiliser le modèle multi-échelles pour l'étudier.

2 Méthode multi-échelles

Le logiciel MigFlow¹ utilisé ici se base sur une méthode dite multi-échelle car la résolution du fluide se fait à une échelle plus grossière, avec une méthode d'éléments finis (FEM), que celle des grains, par une méthode des éléments discrets (DEM).

Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour des valeurs moyennes de la pression et de la vitesse du fluide. Ces valeurs moyennes sont obtenues à partir de la variable de pondération ϕ , la porosité, qui mesure la fraction de volume occupée par le fluide dans le volume de contrôle local, qui dépend donc de la position des grains. En supposant la densité du fluide ρ constante, et en posant $u = \phi w$ la vitesse moyenne du fluide, on obtient les lois de conservations suivantes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\phi} \right) = \nabla \cdot (2\mu\phi\mathbf{d} - p\mathbf{I}) + \mathbf{f} + \phi\rho\mathbf{g},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

avec la pression p , le tenseur unité \mathbf{I} , la densité de forces due aux interactions grains-fluide \mathbf{f} , la gravité \mathbf{g} et \mathbf{d} le tenseur du taux de déformation. Ces équations de conservation sont résolues à l'aide d'une méthode stabilisée d'éléments finis P_1 - P_1 . L'intégration temporelle est résolue par une méthode d'Euler implicite.

La phase granulaire est résolue à l'aide d'une méthode aux éléments discrets, qui suit les trajectoires de chaque particule de manière Lagrangienne. Les vitesses de ces particules sont déduites de la seconde loi de Newton :

$$\frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt} = m_i \mathbf{g} - V_i \nabla p|_{x_i} - \mathbf{f}_i,$$

avec m_i la masse du grain i , V_i son volume, \mathbf{x}_i sa position et \mathbf{v}_i sa vitesse. Les termes $-V_i \nabla p|_{x_i} - \mathbf{f}_i$ traduisent les interactions fluide-grains. Celles-ci sont déterminées à l'aide de lois empiriques adéquates [5].

1. www.migflow.be

Ces vitesses ne tiennent pas compte des contacts entre les grains et avec les parois. Pour chaque contact potentiel, un repère local est construit, avec le vecteur normal et le vecteur tangent au point de contact, comme indiqué à la figure 1. Ces collisions sont résolues à l'aide de la méthode de Dynamique des Contacts (NSCD). Les grains sont considérés être des sphères rigides non-interpénétrables, et les parois sont des corps au repos de masse infinie. Dans un système dense, les collisions ont une nature quasi instantanée, et sont quali-

fiées de *chocs*. Soit $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \omega_i \\ \mathbf{v}_j \\ \omega_j \end{pmatrix}$ le vecteur des vitesses des grains i et j . Il satisfait l'équation de la dynamique :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-) = \mathbf{M}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{p}',$$

où les indices $+$ et $-$ indiquent respectivement les valeurs après et avant la collision, \mathbf{M} étant la matrice de masse et d'inertie des grains et \mathbf{p}' le vecteur des impulsions dues au contact. Soit \mathbf{H} la matrice de changement de base qui permet de transformer les vitesses des grains en vitesse relative au contact $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_n \\ v_t \end{pmatrix}$ dans le repère de la figure 1, et soit \mathbf{H}^T qui effectue la transformation inverse, de l'impulsion relative au contact $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_n \\ p_t \end{pmatrix}$ à \mathbf{p}' . On obtient :

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{H}^T \mathbf{p}, \quad \Delta\mathbf{v} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}^T \mathbf{p}.$$

La sphéricité des particules impliquant une matrice de masse diagonale, il est possible de montrer que la matrice $\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}^T$ est également diagonale [9]. Dans le cas 2D, l'équation ci-dessus se réduit à :

$$\Delta v_n = \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) p_n \quad (1)$$

$$\Delta v_t = \frac{a+1}{a} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) p_t, \quad (2)$$

où $a = \frac{I_i}{m_i r_i^2}$, m_i étant la masse du grain i , r_i son rayon et I_i son moment d'inertie. Les collisions sont choisies parfaitement inélastiques, ce qui permet la dissipation et d'éviter des vibrations rémanentes dans des situations statiques, impliquant $\Delta v_n = -v_n^-$, et donc :

$$p_n = -v_n^- \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

En ce qui concerne l'impulsion tangentielle, l'équation (2) est couplée avec une loi de frottement de Coulomb, de coefficient μ . La valeur de p_t est déterminée selon les conditions suivantes :

Si $v_t^- > \frac{a+1}{a} \mu v_n^-$, alors glissement avant, et :

$$p_t = \mu p_n$$

Si $v_t^- < -\frac{a+1}{a} \mu v_n^-$, alors glissement arrière, et :

$$p_t = -\mu p_n$$

Autrement, non-glissement, et on annule v_t^+ :

$$p_t = -v_t^- \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \frac{a}{a+1}$$

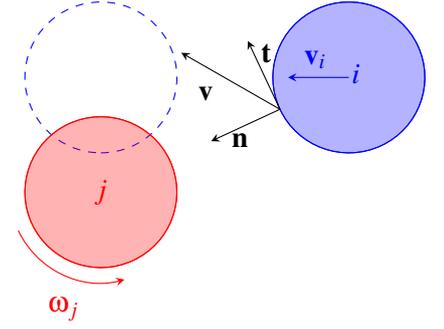


FIGURE 1 – Deux grains en contact potentiel. Si les vitesses n'étaient pas corrigées, le grain bleu viendrait interpénétrer le grain rouge. La composante tangentielle de la vitesse relative domine du fait de la vitesse de rotation du grain rouge.

La résolution pour la collection de grains est présentée dans l’algorithme 1. Afin d’accélérer la convergence de la méthode, une relaxation du problème est appliquée aux corrections dues à l’impulsion tangente.

La détection des contacts potentiels est cruciale. Deux grains sont potentiellement en contact si leur distance centre à centre est inférieure à une distance d’alerte, qui dépend de la durée du pas de temps et de la vitesse des grains. En pratique, la distance d’alerte est fixée à la longueur d’un rayon, et le pas de temps est adapté en fonction de la vitesse des grains. Ainsi, le grain le plus rapide ne peut pas se déplacer d’une distance plus grande que son rayon durant un pas de temps, ce qui empêche les grains de se traverser sans que la collision soit résolue par l’algorithme de contact. En ce qui concerne l’intégration temporelle, la phase granulaire est également résolue de manière implicite. En effet, connaissant les vitesses au début du pas de temps, on calcule via l’algorithme 1 les vitesses au début du pas de temps suivant, qui sont ensuite utilisées pour mettre à jour la position des grains.

3 Validation du frottement

Les interactions fluide-grains ont été validées par *Constant et al.* dans le cas de gouttes constituées de particules sphériques de différents rayons lâchées dans un fluide visqueux sous gravité. Les résultats en 2D et 3D étaient cohérents entre eux et très proches des résultats expérimentaux [5]. En ce qui concerne l’algorithme de résolution des grains, il s’agit de valider la partie qui résout les contacts avec frottement. Tout d’abord, on valide le modèle pour le frottement grain-paroi, au niveau d’un seul grain. On s’intéresse alors au cas d’un grain posé au repos sur un plan incliné subissant la gravité. Lorsque le grain est laissé libre de tourner, on observe deux régimes, en fonction de l’angle de la pente. Lorsque celui-ci est en dessous d’une valeur critique, le grain roule sans glisser le long de la pente. Dès lors, un bilan des forces et des moments permet de déterminer sa vitesse théorique, et de la comparer avec les résultats du modèle. Les résultats de la Table 1 correspondent à une inclinaison de 25° . Ce même bilan des forces et moments permet de déterminer l’angle critique au delà duquel la condition de non-glissement n’est plus satisfaite : $\theta_c = \arctan(3.5\mu)$, et où le grain se met à glisser. On constate que ce comportement est également reproduit par le modèle.

TABLE 1 – Vitesses théoriques (v_t) et numériques (v_n)

t	v_t	v_n
0.2	0.592269	0.593520
1	2.96134	2.96254
5	14.8067	14.8079
25	74.0336	74.0348

Puisque les interactions grain-parois sont validées, il est nécessaire de se tourner vers les interactions entre grains. Comme il n’existe pas de modèle théorique simple pour les décrire, on va s’intéresser au problème du tambour rotatif. Il s’agit d’observer les différents régimes d’écoulement des grains au sein de celui-ci en fonction du nombre de Froude de l’expérience, donné par $Fr = \frac{\omega^2 R}{g}$, ω étant la vitesse angulaire du tambour, g l’accélération gravitationnelle, et R son rayon. Ces régimes ont été décrits par Mellmann sur base d’expériences, et sont représentés à la figure 2 [11]. On considère un ensemble de grains de taille poly-disperse pour éviter des effets de cristallisation, avec un rayon moyen $r = 1.5mm$ et un écart type de $0.075mm$, dans un tambour de rayon $R = 11cm$. Les coefficients de frottement grain-paroi et grain-grain ont été fixés à $\mu = 1$.

Algorithme 1 : Résolution des contacts

Création d'une liste Q de tous les contacts potentiels**for** chaque contact $q \in Q$ **do**

$$d = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - (r_i + r_j)$$

La distance entre les deux grains sphériques i et j impliqués dans le contact q

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$$

La normale centre à centre entre les deux grains

$$\mathbf{t} = (n_2, -n_1)$$

La tangente correspondante, obtenue en appliquant une rotation de -90° à la normale

$$a = \frac{I_i}{m_i r_i^2}$$

Calcul du coefficient a .**end****while** La liste Q n'est pas vide **do****for** chaque contact $q \in Q$ **do**

- Calcul des vitesses relatives normales et tangentielles :

$$v_n \leftarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n} + \delta v_n$$

$$v_t \leftarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{t} + \omega_i r_i + \omega_j r_j + \delta v_t$$

Retrait des anciennes corrections des vitesses dues au contact q

- Résolution de la composante normale de la collision :

$$\delta v_n \leftarrow \max\left(0, v_n - \frac{d}{\Delta t}\right)$$

Calcul de la correction normale due au contact q pour les vitesses des grains modifiées par tous les autres contacts

$$\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i - \frac{m_j}{m_i + m_j} \delta v_n \mathbf{n}$$

Modification des vitesses de grains impliqués dans le contact q

$$\mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}_j + \frac{m_i}{m_i + m_j} \delta v_n \mathbf{n}$$

- Résolution de la composante tangentielle de la collision :

if $v_t > \frac{a+1}{a} \mu \delta v_n$ **then**

$$\delta v_t \leftarrow \mu \delta v_n$$

else if $v_t < -\frac{a+1}{a} \mu \delta v_n$ **then**

$$\delta v_t \leftarrow -\mu \delta v_n$$

else

$$\delta v_t \leftarrow v_t$$

end

$$\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i - \frac{m_j}{m_i + m_j} \frac{a}{a+1} \delta v_t \mathbf{t}$$

Calcul de la correction tangentielle selon une loi de frottement de Coulomb : si il y a glissement, celle-ci est proportionnelle à la correction normale via le coefficient de frottement. Sinon, la correction tangentielle est choisie de manière à annuler la vitesse relative tangentielle

$$\mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{v}_j + \frac{m_i}{m_i + m_j} \frac{a}{a+1} \delta v_t \mathbf{t}$$

Modification des vitesses des grains impliqués dans le contact q

$$\omega_i \leftarrow \omega_i - \frac{m_j}{m_i + m_j} \frac{1}{a+1} \frac{\delta v_t}{r_j}$$

Modification des moment angulaires des grains impliqués dans le contact q

$$\omega_j \leftarrow \omega_j - \frac{m_i}{m_i + m_j} \frac{1}{a+1} \frac{\delta v_t}{r_j}$$

- Suppression de q de Q

- Actualisation de Q

if $\Delta \delta v_n \Delta t > \zeta$ **ou** $\Delta \delta v_t \Delta t > \zeta$ **avec** ζ une tolérance géométrique et $\Delta \delta v_n, \Delta \delta v_t$ les différences entre les correction précédentes et les corrections qui viennent d'être calculées **then**Insertion dans Q de tous les contacts potentiels qui impliquent les grains i et j et qui n'y sont pas déjà**end****end****end**

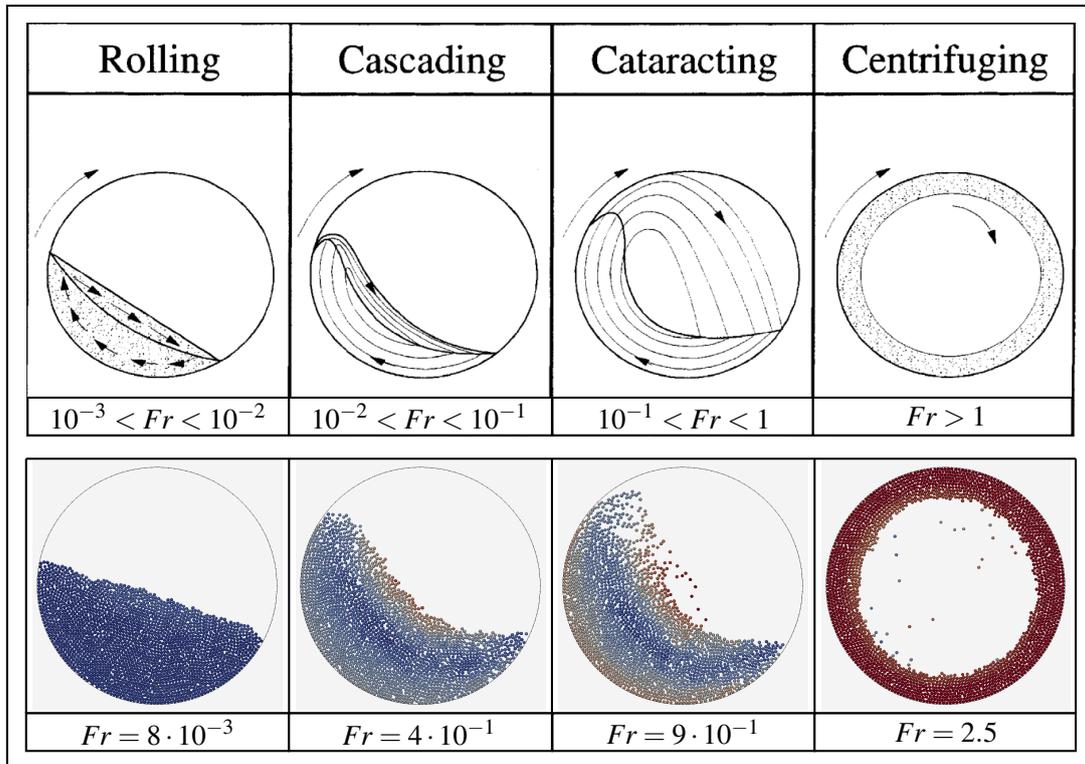


FIGURE 2 – Dessus : observations de Mellman, 2001. Dessous : résultats du modèle. La couleur des grains indique le module de leur vitesse, allant du bleu pour une faible vitesse au rouge pour une vitesse élevée.

On observe que les différents régimes sont bien reproduits, malgré de légères divergences quant aux valeurs nécessaires du nombre de Froude. Toutefois, celles reprises dans la figure 2 sont seulement à titre indicatif, et Mellmann a déterminé des critères de transition sur base notamment du degré de remplissage du tambour et des coefficients de frottement grain-paroi et grain-grain qui sont assez bien respectés. Ainsi, la transition entre vers le régime de centrifugation est prédite pour $Fr \sim 1.41$, tandis que celle vers le régime *en aversé* (cataracting) est prédite pour $Fr \sim 0.6$. En conclusion, le modèle du frottement est validé pour les interactions grain-paroi et grain-grain, et ce à une échelle de plusieurs milliers de grains. Dès lors, il reste à l'utiliser pour le cas immergé dans le cadre de l'expérience numérique présentée ci-dessous.

4 Méthode de simulation proposée

La géométrie du problème consiste en un canal au centre duquel se situe l'objet, représenté par une frontière circulaire immobile, et dans lequel s'écoule un mélange compact fluide-grains à une vitesse v_e , ce qui permet d'obtenir une vitesse relative à la frontière circulaire, reproduisant les conditions d'un objet se déplaçant à travers le milieu granulaire immergé au repos. Pour des questions de coût-calcul, les particules qui dépassent une certaine limite en aval de l'objet sont recyclées pour être réinjectées en amont, ce qui limite leur nombre. Les principaux défis de ce recyclage sont l'obtention d'un écoulement compact et la consistance physique de l'apparition et de la disparition soudaine des particules au sein du fluide. Afin d'obtenir une configuration compacte, les grains sont au préalable laissés se déposer dans la géométrie du problème. Ensuite, lorsque la simulation débute, ils acquièrent une vitesse v_e dans la direction de l'écoulement. Lorsqu'ils sortent du domaine, ils sont réinjectés plus haut, avec une position aléatoire. Du fait de cette insertion aléatoire, il est presque impossible d'obtenir une configuration compacte. De telles configurations sont obtenues généralement par dépôt, comme au départ de la simulation. C'est pourquoi, lorsqu'ils sont réinjectés, les grains se voient donner une vitesse plus élevée que v_e , afin qu'ils viennent se déposer de manière compacte sur les grains en train de s'écouler. Toutefois, cette vitesse supérieure risque d'augmenter la quantité de mouvement des autres grains du domaine, faussant ainsi les résultats. Dès lors, une zone tampon est mise en place en amont du domaine et en aval de la zone de réinjection, où

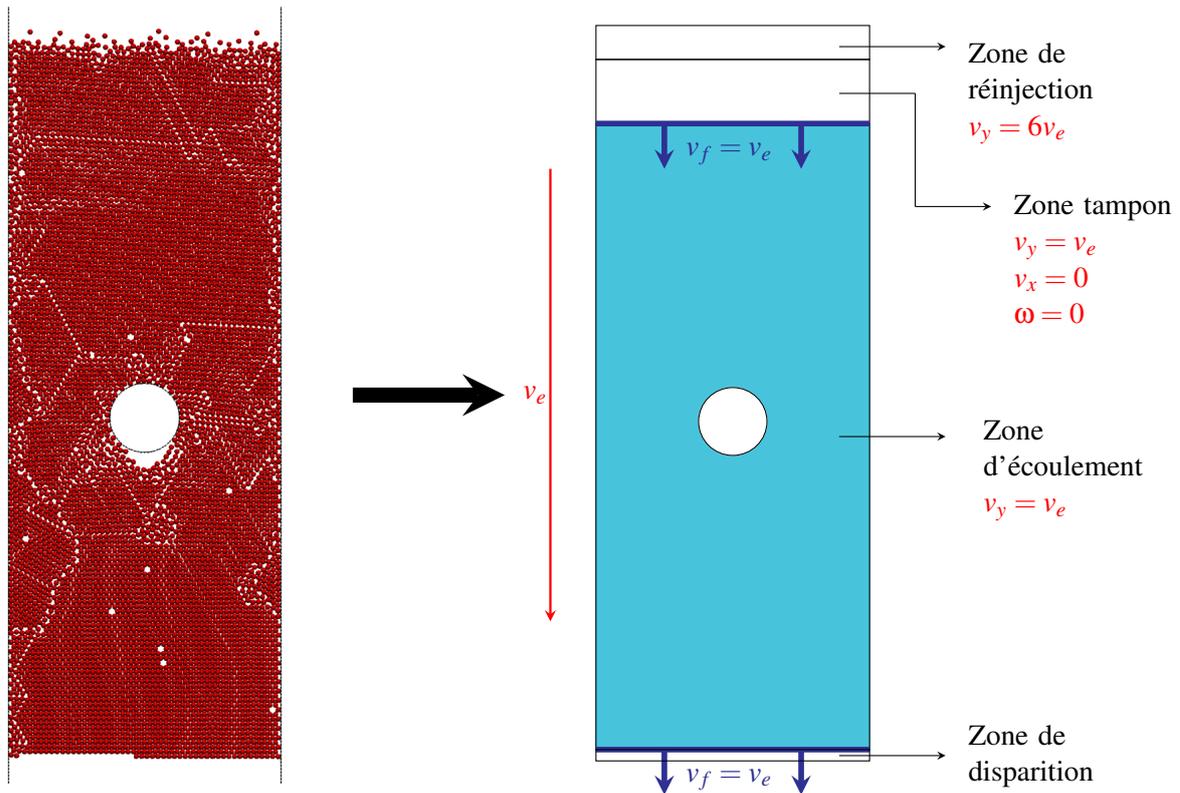


FIGURE 3 – Géométrie de l'écoulement

la vitesse des grains est réimposée à v_e , leur vitesse transversale et de révolution nulle. Afin d'éviter les effets de bord dus aux parois, celle-ci sont rendues glissante, dans le sens où la friction est ignorée. Le fluide ne sera simulé que sur la zone d'écoulement : cela permet d'éviter des sauts dans la porosité du à la disparition ou à l'apparition soudaine des grains. En ce qui concerne les frontières entrantes et sortantes de cette zone, la compacité de la phase granulaire limite fortement ces sauts de porosité. La vitesse du fluide est également imposée à $v_f = v_e$ à l'entrée et à la sortie de la zone d'écoulement, et nulle sur les côtés du canal.

5 Conclusion et perspectives

Étant donné son rôle majeur dans la force de traînée sur un objet se déplaçant dans un milieu granulaire sec, la friction a été implémentée dans un modèle pour les écoulements granulaires immergés, en résolvant les collisions des grains entre eux et avec les parois à l'aide de la méthode Non Smooth Contact Dynamics. Cette implémentation a été ensuite validée dans le cas sec du tambour rotatif, à l'échelle de plusieurs milliers de grains. Les résultats sont en accord qualitatif et quantitatif avec la littérature. Enfin, une méthode de simulation a été présentée pour l'étude numérique de la force traînée dans le cas immergé, encore mal connu. Il reste à simuler cette expérience numérique pour différents paramètres physiques, tels que le coefficient de frottement entre les grains, la vitesse de l'écoulement ou encore la viscosité du fluide, et en tirer des conclusions sur leur influence sur la traînée.

Références

- [1] I. Albert, P. Tegzes, B. Kahng, R. Albert, J.G. Sample, M. Pfeifer. *Jamming and Fluctuations in Granular Drag*. Physical Review Letters, 84 :5122–5125, 2000.
- [2] R. Albert, M.A. Pfeifer, A.-L. Barabasi, P. Schiffer. *Slow Drag in a Granular Medium*. Physical Review Letters, 82 :205–208, 1999.
- [3] S.P.D. Birch, M. MAnaga, B. Delbridge, M. Chamberlain. *Penetration of spherical projectiles into wet granular media*. Physical Review E, 90 :032208, 2014.

- [4] M.A. Carrigy. *Experiments on the angles of repose of granular materials*¹. *Sedimentology*, 14 :147–158, 1970.
- [5] M. Constant, F. Dubois, J. Lambrechts, V. Legat. *Implementation of an unresolved stabilised FEM-DEM model to solve immersed granular flows*. *Comp. Part. Mech.*, 5 :1–14, 2018.
- [6] J. Geng, R.P. Behringer. *Slow drag in two-dimensional granular media*. *Physical Review E*, 71 :011302, 2005.
- [7] D. Gidaspow. *Multiphase flow and fluidization : Continuum and Kinetic Theory Description*. Academic Press, 2012.
- [8] H.H. Hu. *Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures*. *International Journal of Multiphase Flow*, 22 :335–352, 1996.
- [9] M. Jean. *The non-smooth contact dynamics method*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- [10] C.K.K. Lun, S.B. Savage, D.J. Jeffrey, N. Chepurnyi. *Kinetic theory for granular flows : inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield*. *Journal of fluid mechanics*, 140 :223–256, 1984.
- [11] J. Mellmann. *The transverse motion of solids in rotating cylinders—forms of motion and transition behavior*. *Powder Technology*, 118 :251–270, 2001.
- [12] Thorsten Pöschel. *Granular material flowing down an inclined chute : a molecular dynamics simulation*. *Journal de Physique II*, 3 :27–40, 1993.
- [13] B. Sovilla, M. Kern, M. Schaer. *Slow drag in wet-snow avalanche flow*. *Journal of Glaciology*, 56 :587–592, 2010.
- [14] Y. Takehara, K. Okumura. *High-Velocity Drag Friction in Granular Media near the Jamming Point*. *Physical Review Letters*, 112 :148001, 2014.
- [15] C.R. Wassgren, D. Chehata, R. Zenit. *Dense granular flow around an immersed cylinder*. *Physics of Fluids*, 15 :1622–1631, 2003.
- [16] C.R. Wassgren, A. Karion, J.A. Cordova, R. Zenit. *Dilute granular flow around an immersed cylinder*. *Physics of Fluids*, 15 :3318–3330, 2003.
- [17] K. Wieghardt. *Experiments in Granular Flow*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 7 :89–114, 1975.